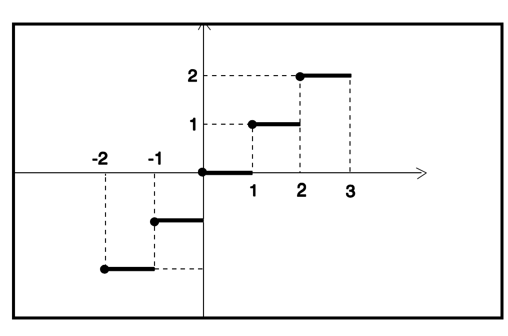
SOLUCIONES DE LA RELACIÓN Nº 6

1.- SOLUCIONES CORRESPONDIENTES A LA RELACIÓN Nº 1:

4.- [Probl. Mat. COU.- Edit. Alhambra.- Ej. 4 - Pág. 57]

y = E*(x)*



* Sea *a* 0 Z, *a* ... 0 Y *f*(*a*) = *a* ..... No es continua

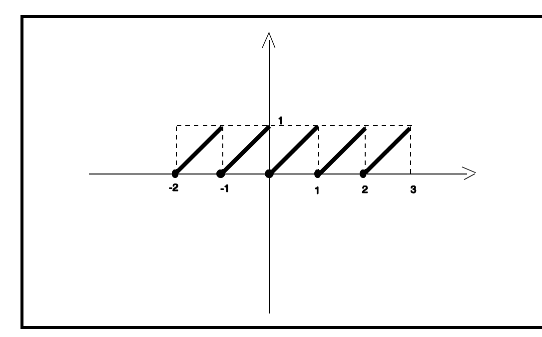
* *f*(0) = 0, œ *x* 0 (−1, 1), *f(x)* = 0 , continua en 0 ¡¡¡Mentira!!! el libro define mal la función parte entera

* Si *x* ó Z, p<*x*<p+1 y œ *x* 0 (*x*, $\frac{\delta}{2}$) los *f(x)* son =s siendo δ el menor de **x*−p* y **x*−p−1* luego será continua.

ˆ es continua en todos los puntos menos en los enteros.

5.- [Probl. Mat. COU.- Ed. Alhambra.- Ej. 5 - Pág. 57-58]

y = *x* − E*(x)*



Por ser suma de funciones continuas lo será salvo en los puntos enteros.

8.- Dom de continuidad *f(x)* = R − {4, 3}

En 4 y 3 Discont. de tipo infinito

17.- Dom cont. *f(x)* = R − {1, −1}

En 1 y −1 Discont. de tipo infinito, ya que:

$$\lim_{\substack{x \to 1^-\\ x = 1-h}} \frac{4}{e^x\,(x^2-1)} = \lim_{h \to 0} \frac{4}{e^{1-h}\,[(1-h)^2-1]} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4}{e^{1-h}\,(h^2-2h)} = \lim_{h \to 0} \frac{4}{e^{1-h}\,h\,(h-2)} =$$

$$= \frac{4}{e \cdot 0 \cdot (0-2))} = \frac{4}{-0} = -\infty$$; análogamente:

$$\lim_{x \to 1^+} \text{———} = \ldots = \infty$$

18.- Dom cont. $f(x) = (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$

En 1 y 5 Discontinuidad de tipo infinito.

$$\lim_{x \to 1^-} L\,(x^2-6x+5) = L \lim_{x \to 1^-} (\quad) = L \lim_{h \to 0} [(1-h)^2-6(1-h)+5] =$$

$$= L \lim_{h \to 0} (1+h^2-2h-6+6h+5) = L \lim_{h \to 0} (h^2+4h) =$$

$$= L \lim_{h \to 0} h(h+4) = L\,0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to 5^+} L\,(\quad) = L \lim_{h \to 0} (25+h^2+10h-30-6h+5) =$$

$$= L \lim_{h \to 0} (h^2+4h) = L\,0 = -\infty$$

19.- Dom cont. $f(x) = (-3, -2) \cup (-1, \infty)$

En -1, -2 y -3 Discont. de tipo infinito.

$$\lim_{x \to -1} \log\frac{(x+1)(x+2)}{x+3} = \log \lim_{x \to -1} \text{——} = \log \frac{0 \cdot 1}{2} = \log 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \text{——} = \lim_{x \to -1} \text{——} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -1^-} \textit{ no tiene sentido}$$

$$\lim_{x \to -2} \log\frac{(x+1)(x+2)}{x+3} = \log \lim_{x \to -2^-} \frac{(x+1)(x+2)}{x+3} =$$

$$= \log \lim_{h \to 0} \frac{(-2-h+1)(-2-h+2)}{-2-h+3} = \log \lim_{h \to 0} \frac{(-1-h)(-h)}{(1-h)} =$$

$$= \log \frac{-1 \cdot (-0)}{1} = \log 0 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -2^+} \textit{ no tiene sentido}$$

$$\lim_{x \to -3} \log\frac{(x+1)(x+2)}{x+3} = \log \lim_{x \to -3^+} \frac{(x+1)(x+2)}{x+3} =$$

$$= \log \lim_{h \to 0} \frac{(-3+h+1)(-3+h+2)}{-3+h+3} = \log \lim_{h \to 0} \frac{(-2+h)(-1+h)}{h} =$$

$$= \log \frac{-2 \cdot (-1)}{0} = \log \frac{2}{0} = \log \infty = \infty \quad ; \quad \lim_{x \to -3^-} \textit{ no tiene sentido}$$

21.- Dom cont. $f(x) = (0, 1) \cup (1, 2] \cup [3, 4)$

Continua en 3 por la derecha y en 2 por la izqda., en el punto 1 Discontinua de tipo infinito.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3} \ldots = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{\ }}{\log x} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h^2+h}}{\log(3+h)} = \dfrac{0}{\log 3} = 0 \\ f(3) = \dfrac{\sqrt{0}}{\log} 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Continua en 3 por la derecha.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2} \ldots = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{\ }}{\log x} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h^2+h}}{\log(2-h)} = \dfrac{0}{\log 2} = 0 \\ f(2) = \dfrac{\sqrt{0}}{\log} 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Continua en 2 por la izquierda

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\ }}{\log x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2-5h+6}}{\log(0+h)} = \frac{\sqrt{6}}{\log 0} = \frac{\sqrt{6}}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{\ }}{\log x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(1+h)^2-5(1+h)+6}}{\log(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2-3h+2}}{\log(1+h)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\log 1} = \frac{\sqrt{2}}{>0} = \frac{\sqrt{2}}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{\ }}{\log x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(1-h)^2-5(1-h)+6}}{\log(1-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2+3h+2}}{\log(1-h)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\log 1} = \frac{\sqrt{2}}{<0} = \frac{\sqrt{2}}{-0} = -\infty$$

Hagamos la gráfica de la función, básicamente estudiaremos la rama parabólica paralela al eje OX, la condición necesaria para que exista asíntota oblicua es que el límite de la función para x tendiendo a infinito valga infinito:

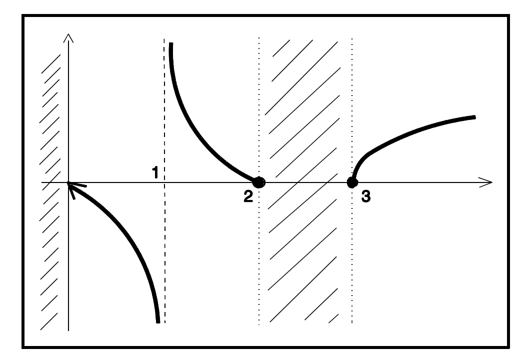
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\log x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}}{\dfrac{1}{x}\log e} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x}{2\sqrt{x^2-5x+6}\,\log e} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^2} - \dfrac{5x}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^2}{x^4} - \dfrac{5x}{x^4} + \dfrac{6}{x^4}}\,\log e} = \frac{2}{0} = \infty$$

Calculemos m :

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x \cdot \log x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}}{\log x} = \frac{\sqrt{1-0+0}}{\log \infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \;\Rightarrow$$

Luego hay una rama parabólica paralela al eje OX cuando x tiende a mas infinito. La gráfica quedará definitivamente así:



22.- Dom cont. $f(x) = R - \{0\}$

En 0 Discontinuidad de tipo infinito

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{x+1}{x}} = \lim_{h \to 0} e^{\frac{0+h+1}{0+h}} = \lim_{h \to 0} e^{\frac{h+1}{h}} = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x+1}{x}} = \lim_{h \to 0} e^{\frac{0-h+1}{0-h}} = \lim_{h \to 0} e^{\frac{-h+1}{-h}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

SOLUCIONES CORRESPONDIENTES A LA RELACIÓN Nº 2:

61.-

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{h \to 0} \frac{|-2+h+2|}{-2+h+2} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{h \to 0} \frac{|-2-h+2|}{-2-h+2} = \lim_{h \to 0} \frac{|-h|}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h} = -1$$

La función no existe en el punto −2 y además los límites laterales aunque existen no coinciden por lo que no tiene límite en −2, por tanto en dicho punto presenta una discontinuidad de tipo finito.

También se podía haber hecho así:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & Si\ x \neq -2 \\ 1 & Si\ x = -2 \end{cases}$$ que desarrollando:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+2} & Si \quad x+2>0 \quad ó \quad x>-2 \\ \dfrac{-x-2}{x+2} & Si \quad x+2<0 \quad ó \quad x<-2 \\ 1 & Si \ x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2^+ \\ x > -2}} \frac{x+2}{x+2} = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2^- \\ x < -2}} \frac{-x-2}{x+2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{-(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2^-} -1 = -1$$

62.-

$$y = |1-|x|| = \begin{cases} |1-x| & Si \quad x \geq 0 \\ |1+x| & Si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

$$y = |1-|x|| = \begin{cases} 1-x & Si \ \begin{cases} x\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ x\leq 1 \end{matrix}\right\} \ 0\leq x\leq 1 \\ x-1 & Si \ \begin{cases} x>0 \\ 1-x\leq 0 \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ x\geq 1 \end{matrix}\right\} \ x\geq 1 \\ 1+x & Si \ \begin{cases} x\leq 0 \\ 1+x\geq 0 \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} x\leq 0 \\ x\geq -1 \end{matrix}\right\} \ -1\leq x\leq 0 \\ -1-x & Si \ \begin{cases} x\leq 0 \\ 1+x\leq 0 \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} x\leq 0 \\ x\leq -1 \end{matrix}\right\} \ x\leq -1 \end{cases}$$

63.-

$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$ y se resuelven las inecuaciones.

$$y = |x^2-7x+10| = \begin{cases} x^2-7x+10 & Si \ x^2-7x+10\geq 0 \quad ó \quad x\leq 2 \ \ y \ \ x\geq 5 \\ -x^2+7x-10 & Si \ x^2-7x+10 \leq 0 \quad ó \quad 2\leq x\leq 5 \end{cases}$$

y ordenando la función:

$$y = |x^2-7x+10| = \begin{cases} x^2-7x+10 & Si \quad x\leq 2 \\ -x^2+7x-10 & Si \quad 2\leq x\leq 5 \\ x^2-7x+10 & Si \quad x\geq 5 \end{cases}$$

64.-

$$y = \frac{1}{|x^2-7x+10|} = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-7x+10} & Si\ \ x^2-7x+10>0 \quad ó \quad x<2\ \ y\ \ x>5 \\[2ex] \dfrac{-1}{x^2-7x+10} & Si\ \ x^2-7x+10<0 \quad ó \quad 2<x<5 \end{cases}$$

SOLUCIONES CORRESPONDIENTES A LA RELACIÓN Nº 6:

2.- $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-4)\ L\ x}$ Dom f(x) $\Rightarrow$ Dom Cont. $f(x)$ ......

Dom $f = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 4)$ = Dom Contin. $f(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(\ \ )L\ x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ \ } = \lim_{h\to 0} \frac{1}{[(0+h)^2-4]\ L(0+h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(h^2-4)\ Lh} = \frac{1}{(-4)\ L0} = \frac{1}{(-4)(-4)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

En 0 Discontinuidad de tipo infinito.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x^2-4)\ Lx} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{[(1+h)^2-4)]\ L(1+h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1+h^2+2h-4)\ L(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(h^2+2h-3)\ L(1+h)} =$$

$$= \frac{1}{(-3)L1} = \frac{1}{-3\cdot 0} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(\ \ )\ Lx} = \infty$$

En 1 Discontinuidad de tipo infinito.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x^2-4)\ Lx} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{[(2-h)^2-4)]\ L(2-h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(h^2-4h)\ L(2-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(h-4)\ L(2-h)} =$$

$$= \frac{1}{(-4)\cdot 0\cdot L2} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(\ \ )\ Lx} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(h^2+4h)\ L(2+h)} = \frac{1}{0} = \infty$$

En 2 Discontinuidad de tipo infinito.

4.- $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

Dom $f(x) = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ = Dom Continuidad $f(x)$

En 1 es continua por la izquierda, y en 2 por la derecha.

5.- $f(x) = tg\,(x^2 - 5x + 4)$

Dom $f(x) = \mathrm{R} - \left\{ \dfrac{5 \pm \sqrt{9+2\pi+4K\pi}}{2} \right\}$ = Dom Cont. $f(x)$

En los puntos $\left\{ \dfrac{5 \pm \sqrt{9+2\pi+4K\pi}}{2} \right\}$ hay Discont. de tipo inf.

11.- $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-2}{x^2}} & Si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Dom f = R

Dom Cont. f = R − ¿{valores donde hay un cambio en el comportamiento de la función}?

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{x-2}{x^2}} = \lim_{h \to 0} e^{\frac{0+h-2}{(0+h)^2}} = \lim_{h \to 0} e^{\frac{h-2}{h^2}} = e^{\frac{-2}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x-2}{x^2}} = \lim_{h \to 0} e^{\frac{0-h-2}{(0-h)^2}} = \lim_{h \to 0} e^{\frac{-h-2}{h^2}} = e^{\frac{-2}{0}} = \frac{1}{e^{\frac{2}{0}}} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \infty$$

$f(0) = 0$

Por consiguiente $f(x)$ también es continua en 0.

NOTA: También se puede hacer dándole valores a $x \to 0^+$ y $x \to 0^-$ con la calculadora.

12.- $f(x) = \dfrac{sen\ x + \cos x}{sen\ x - \cos x}$

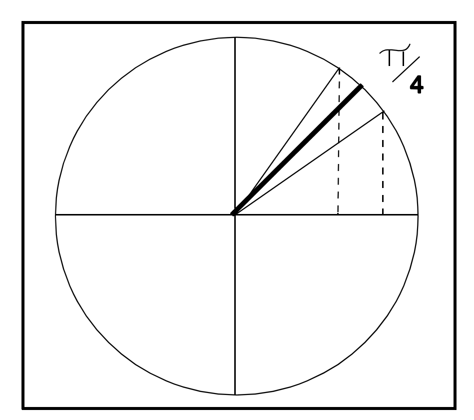
Dom f(x) = R − $\left\{ \dfrac{\pi}{4} + K\pi \right\}$ = Dom Cont. $f(x)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} — = \lim_{h \to 0} \frac{sen(\frac{\pi}{4}+h) + \cos(\frac{\pi}{4}+h)}{sen(\frac{\pi}{4}+h) - \cos(\frac{\pi}{4}+h)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{>0} = \infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \text{—} = \lim_{h \to 0} \frac{sen(\frac{\pi}{4}-h) + \cos(\frac{\pi}{4}-h)}{sen(\frac{\pi}{4}-h) - \cos(\frac{\pi}{4}-h)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-0} = -\infty$$

Para calcular los anteriores límites hemos tenido en cuenta lo siguiente:

$$\begin{cases} sen\ \frac{\pi}{4} = \cos\ \frac{\pi}{4} \\ sen\ (\frac{\pi}{4}+h) > \cos\ (\frac{\pi}{4}+h) \\ sen\ (\frac{\pi}{4}-h) < \cos\ (\frac{\pi}{4}-h) \end{cases}$$



27.- Es una función continua en todo R por ser suma de funciones continuas en todo R.

28.- Es una función continua en todo R por ser suma y cociente de funciones continuas en todo R, ya que además el denominador no se anula nunca (siempre toma valores positivos).